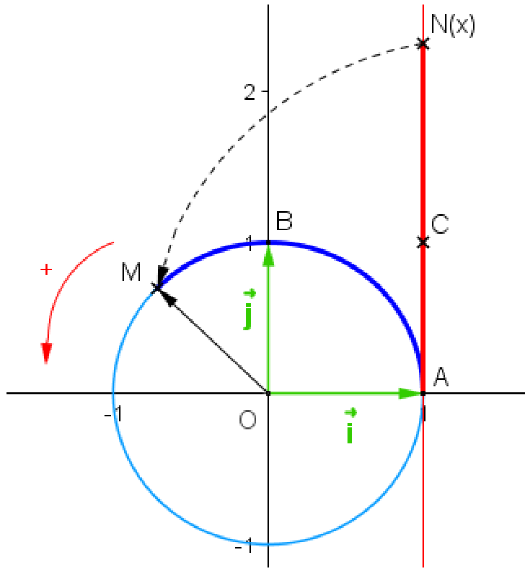
TRIGONOMÉTRIE

I. Cercle trigonométrique et radian

1) Le cercle trigonométrique



Définition : le cercle trigonométrique est le cercle de centre O et de rayon 1 orienté dans le sens direct : c'est à dire le sens inverse des aiguilles d'une montre.

2) Enroulement d'une droite autour du cercle trigonométrique

Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère le cercle trigonométrique et une droite (AC) tangente au cercle en A et orientée telle que $(A\,;\,\vec{\jmath})$ soit un repère de la droite.

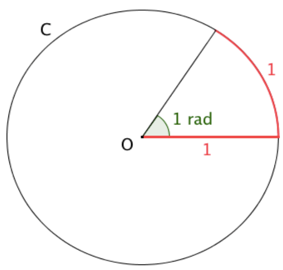
Si l'on « enroule » la droite autour du cercle, on associe à tout point N d'abscisse x de la droite orientée un unique point M du cercle.

La longueur de l'arc $\widehat{AM}$ est ainsi égale à la longueur AN.

3) Le radian

La longueur du cercle trigonométrique est égale à 2π. En effet, son rayon est 1 donc $P = 2\pi R = 2\pi \times 1 = 2\pi$
Ainsi, à un tour complet sur le cercle, on peut faire correspondre le nombre réel 2π.
On définit alors une nouvelle unité d'angle : **le radian**, tel qu'un tour complet mesure 360° ou 2π radians.

Définition :
On appelle **radian**, noté *rad*, la mesure de l'angle au centre qui intercepte un arc de longueur 1 du cercle.



4) Correspondance degrés et radians

Ainsi, à 2π radians (tour complet), on fait correspondre un angle de 360°.
Par proportionnalité, on obtient les correspondances suivantes :

Angle en degré	0°	30°	45°	60°	90°	180°	360°
Angle en radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π

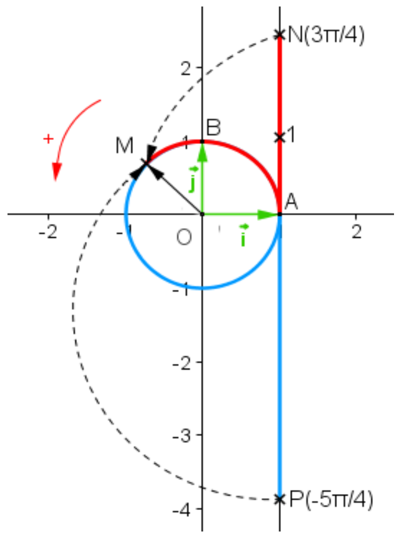
Exercices : Passer des degrés aux radians et réciproquement

1) Donner la mesure en radians de l'angle α de mesure 33°.

2) Donner la mesure en degrés de l'angle β de mesure $\frac{3\pi}{8}$ rad.

II. Mesure d'un angle orienté

1) Plusieurs enroulements de la droite



A plusieurs points de la droite orientée on peut faire correspondre un même point du cercle. La droite orientée peut en effet s'enrouler plusieurs fois autour du cercle dans un sens et dans l'autre.

Exemples :

- Ci-contre, les points N et P d'abscisses $\frac{3\pi}{4}$ et $-\frac{5\pi}{4}$ **correspondent tous les deux au point M**.

En effet : $\frac{3\pi}{4} - 2\pi = -\frac{5\pi}{4}$

2) Mesure principale d'un angle orienté

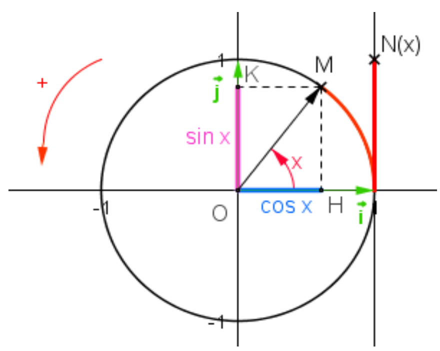
On a vu qu'un angle possède plusieurs mesures.
Si θ est une mesure de l'angle $(\vec{\imath}\,;\overrightarrow{OM})$ alors tout angle de la forme $\theta + k \times 2\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$, est une mesure de l'angle $(\vec{\imath}\,;\overrightarrow{OM})$.
On dit que l'angle $(\vec{\imath}\,;\overrightarrow{OM})$ est égal à θ **modulo** 2π.

Définition : La **mesure principale d'un angle orienté** est la mesure, qui parmi toutes les autres, se situe dans l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$.

Exemples : Donner la mesure principale d'un angle
Donner la mesure principale de l'angle $\frac{27\pi}{4}$.

Exercices : n° 37 page 194 + n° 23 page 193 + n° 20 et 21 page 193.

III. Cosinus et sinus d'un angle



Pour tout nombre réel x, considérons le point N de la droite orientée d'abscisse x.

À ce point, on fait correspondre un point M sur le cercle trigonométrique.
On appelle H et K les pieds respectifs des perpendiculaires à l'axe des abscisses et à l'axe des ordonnées passant par M.

1) Définitions :

- Le **cosinus** du nombre réel x est l'abscisse de M et on note **cos** x.
- Le **sinus** du nombre réel x est l'ordonnée de M et on note **sin** x.

2) Propriétés :

$-1 \leq \sin x \leq 1$ $\qquad -1 \leq \cos x \leq 1$ $\qquad \cos^2 x + \sin^2 x = 1$

3) Valeurs remarquables des fonctions sinus et cosinus :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

Démonstrations au programme :

- Démontrons que : $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

La mesure $\frac{\pi}{4}$ radian est à égale à la mesure 45°.
Le triangle OHM est rectangle est isocèle en H, en effet l'angle $\widehat{OMH}$ est égal à :
180 – 90 – 45 = 45°.
Donc HO = HM et donc : $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$.
Or, $\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$
Soit :

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

IV. Application et méthode

Sachant que $x \in \left[\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$ et que $\sin(x) = 0{,}4$, donner la valeur exacte puis une valeur approchée au centième de $\cos(x)$.

SOLUTION

On sait que $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ donc $\cos^2(x) = 1 - 0{,}4^2 = 0{,}84$.
On en déduit que $\cos(x) = \sqrt{0{,}84}$ ou $\cos(x) = -\sqrt{0{,}84}$
Or, $x \in \left[\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$ donc $\cos(x) \leqslant 0$ et ainsi $\cos(x) = -\sqrt{0{,}84} \approx -0{,}92$

Pour s'entraîner : exercices **29** à **31** p. 193

Méthode

- On utilise la formule $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ qui permet de relier le sinus et le cosinus d'un nombre.
- On résout l'équation associée.
- On choisit la bonne valeur en utilisant l'intervalle auquel appartient x.